打造一流资源　推动教学创新

厦门大学数学科学学院 杜妮

2023.03.25

厦门大学高等代数教学团队

厦门大学“高等代数”线上资源

国家级精品课程

http://gdjpkc.xmu.edu.cn

国家级资源共享课

http://www.icourses.cn/sCourse/course_3077.html

国家级一流本科课程

http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

http://www.icourse163.org/course/XMU-1001951004

一流课程资源___教学视频

六、(10分) 设$A, B \in F^{n\times n}$, $\lambda, \mu \in F$, 满足$AB+\lambda A+\mu B=O$, $\lambda\mu \neq 0$. 证明: A可对角化的充分必要条件是B可对角化.

证明 (法一) (胡祎晗祺, 金昌麒, 梅书豪, 王珂峥, 王遂, 张超 等)

充分性 由B 可对角化可

的特征值分别为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

$$0=(AB+\lambda A$$

若$\lambda+\lambda_i=0$, 则

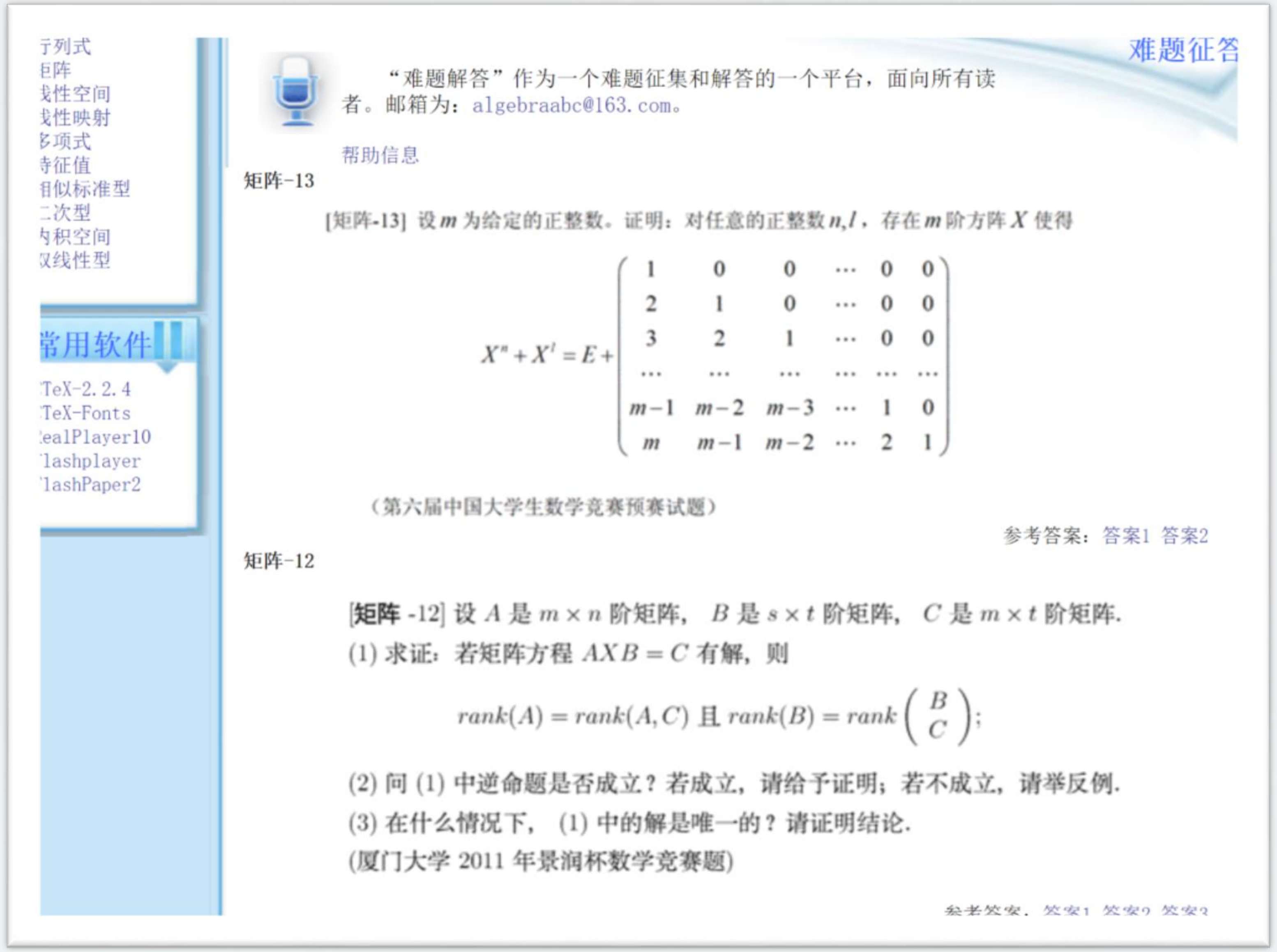
(法五) (阮俊伟, 王瑞吉, 王泽晟, 吴达隆等) 对任意$\alpha \in V$, $\alpha=(\alpha,\xi_1)\xi_1+(\alpha,\xi_2)\xi_2+\cdots+(\alpha,\xi_n)\xi_n=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)((\alpha,\xi_1),(\alpha,\xi_2),\cdots,(\alpha,\xi_n))^{\mathrm{T}}$. 因此$\varphi$和$\psi$在$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$下的矩阵$A$, B分别为

$$A=\begin{pmatrix} (\varphi(\xi_1),\xi_1) & (\varphi(\xi_2),\xi_1) & \cdots & (\varphi(\xi_n),\xi_1) \\ (\varphi(\xi_1),\xi_2) & (\varphi(\xi_2),\xi_2) & \cdots & (\varphi(\xi_n),\xi_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi(\xi_1),\xi_n) & (\varphi(\xi_2),\xi_n) & \cdots & (\varphi(\xi_n),\xi_n) \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} (\psi(\xi_1),\xi_1) & (\psi(\xi_2),\xi_1) & \cdots & (\psi(\xi_n),\xi_1) \\ (\psi(\xi_1),\xi_2) & (\psi(\xi_2),\xi_2) & \cdots & (\psi(\xi_n),\xi_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\psi(\xi_1),\xi_n) & (\psi(\xi_2),\xi_n) & \cdots & (\psi(\xi_n),\xi_n) \end{pmatrix}.$$

学生拥有冠名权

一流课程资源___难题征答



难题征答

“难题解答”作为一个难题征集和解答的一个平台，面向所有读者。邮箱为：algebraabc@163.com。

帮助信息

常用软件

矩阵-13

[矩阵-13] 设 m 为给定的正整数。证明：对任意的正整数 n,l，存在 m 阶方阵 X 使得

$$X^n+X^l=E+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m-1 & m-2 & m-3 & \cdots & 1 & 0 \\ m & m-1 & m-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

（第六届中国大学生数学竞赛预赛试题）

参考答案：答案1 答案2

矩阵-12

[**矩阵** -12] 设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，B 是 $s\times t$ 阶矩阵，C 是 $m\times t$ 阶矩阵.

(1) 求证：若矩阵方程 $AXB=C$ 有解，则

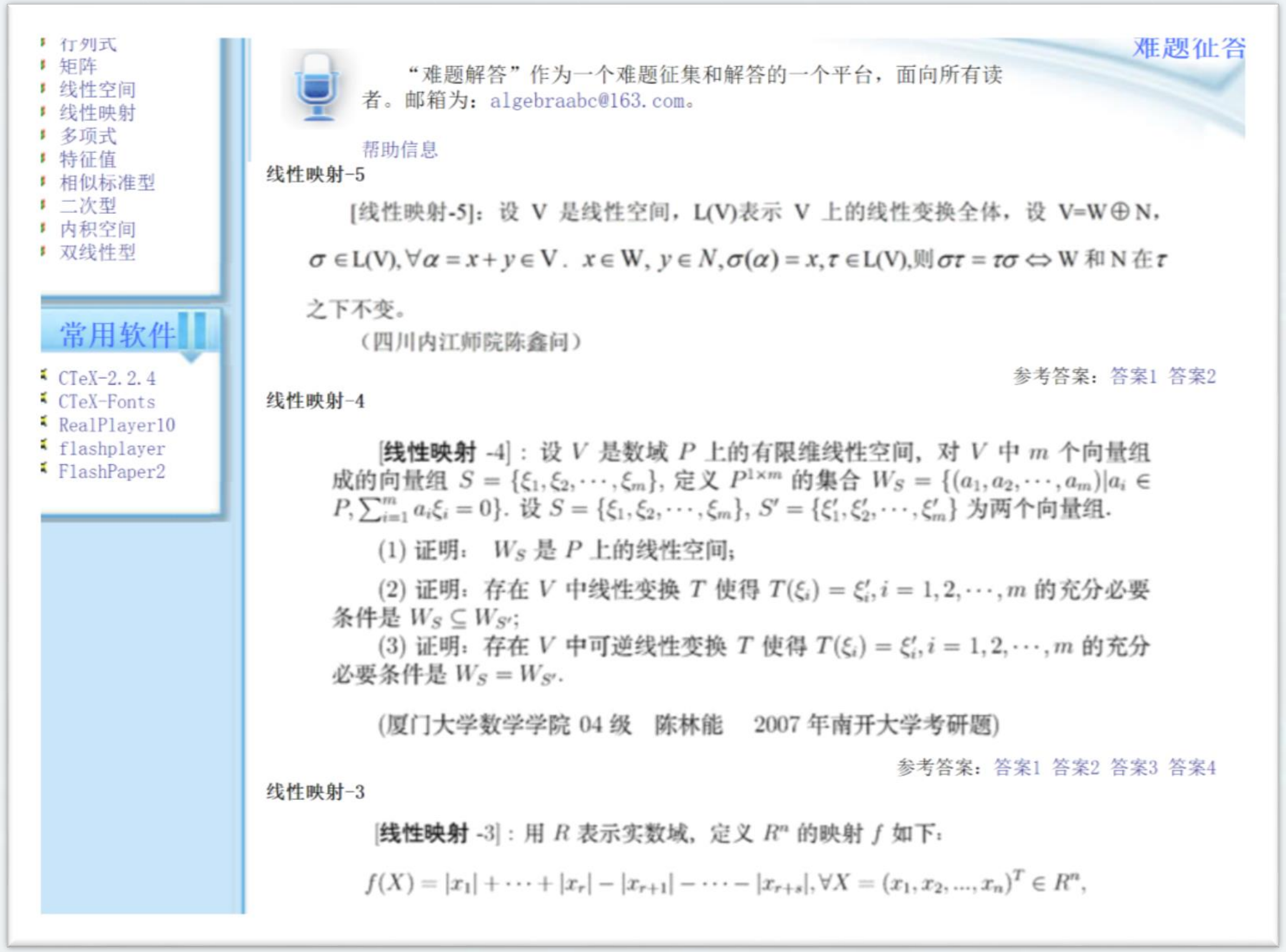
$$rank(A)=rank(A,C) \text{ 且 } rank(B)=rank\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix};$$

(2) 问 (1) 中逆命题是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，请举反例.

(3) 在什么情况下，(1) 中的解是唯一的？请证明结论.

(厦门大学 2011 年景润杯数学竞赛题)

参考答案：答案1 答案2 答案3



行列式
矩阵
线性空间
线性映射
多项式
特征值
相似标准型
二次型
内积空间
双线性型

常用软件

CTeX-2.2.4
CTeX-Fonts
RealPlayer10
flashplayer
FlashPaper2

难题征答

“难题解答”作为一个难题征集和解答的一个平台，面向所有读者。邮箱为：algebraabc@163.com。

帮助信息

线性映射-5

[线性映射-5]：设 V 是线性空间，L(V)表示 V 上的线性变换全体，设 V=W⊕N，$\sigma\in L(V),\forall\alpha=x+y\in V$. $x\in W,\ y\in N,\sigma(\alpha)=x,\tau\in L(V)$,则 $\sigma\tau=\tau\sigma\Leftrightarrow$ W 和 N 在 τ 之下不变。

（四川内江师院陈鑫问）

参考答案：答案1 答案2

线性映射-4

[**线性映射** -4]：设 V 是数域 P 上的有限维线性空间，对 V 中 m 个向量组成的向量组 $S=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m\}$，定义 $P^{1\times m}$ 的集合 $W_S=\{(a_1,a_2,\cdots,a_m)|a_i\in P,\sum_{i=1}^m a_i\xi_i=0\}$. 设 $S=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m\}$, $S'=\{\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_m'\}$ 为两个向量组.

(1) 证明：W_S 是 P 上的线性空间；

(2) 证明：存在 V 中线性变换 T 使得 $T(\xi_i)=\xi_i',i=1,2,\cdots,m$ 的充分必要条件是 $W_S\subseteq W_{S'}$；

(3) 证明：存在 V 中可逆线性变换 T 使得 $T(\xi_i)=\xi_i',i=1,2,\cdots,m$ 的充分必要条件是 $W_S=W_{S'}$.

(厦门大学数学学院 04 级 陈林能 2007 年南开大学考研题)

参考答案：答案1 答案2 答案3 答案4

线性映射-3

[**线性映射** -3]：用 R 表示实数域，定义 R^n 的映射 f 如下：

$$f(X)=|x_1|+\cdots+|x_r|-|x_{r+1}|-\cdots-|x_{r+s}|,\forall X=(x_1,x_2,...,x_n)^T\in R^n,$$

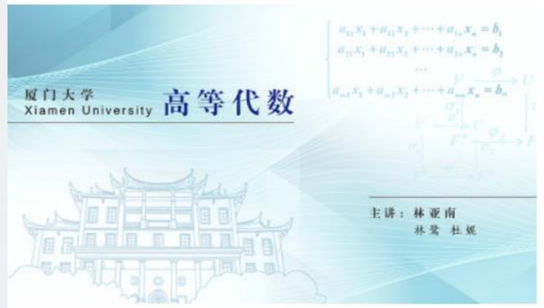
面向校内外所有学习者

国家精品课程http://gdjpkc.xmu.edu.cn

总访问量	633.6万人次
平均每天访问量	约1000人次
总下载和查看	645.7万次
教学视频	46.3万次（网站） +246万次（其他）
难题解答	线上解答数千题 观看8.2万次
电子课件	下载和观看 63.1万次
课程教案	下载和观看 88.3万次
课程试卷	下载和观看 65.2万次
考研竞赛题选	下载和观看 59.8万次
应用与实验	下载和观看 46.5万次
校外访问量占95%	

高等代数及高等代数习题课MOOC

高等代数(上)http://www.icourse163.org/course/XMU-1001951004



高等代数（上） 国家精品

厦门大学 林亚南、杜妮、林鹭

厦门大学的高等代数慕课前六期上下集共有17万人次选修。这是在国家级精品课程、资源共享课程基础上打造的线上课程。欢迎集体选用。目前相应的高等代数习题课也上线中国大学MOOC。

9883人参加 进行至第13周

高等代数(下)http://www.icourse163.org/course/XMU-1002554004

高等代数（下） 国家精品

厦门大学 林亚南、杜妮、林鹭

厦门大学的高等代数慕课前六期上下集共有17万人次选修。这是在国家级精品课程、资源共享课程基础上打造的线上课程。欢迎集体选用。目前相应的高等代数习题课也上线中国大学MOOC。

8213人参加 进行至第13周

高等代数习题课https://www.icourse163.org/learn/XMU-14620861

高等代数习题课

厦门大学 杜妮、林鹭、林亚南

"高等代数（习题课）"是和"高等代数"MOOC相匹配的课程，也可以作为《线性代数》的提高课程。识点串讲，精选例题，助你熟悉解题的思路与技巧；领悟数学的思想和方...

课程类别： 全部 一流课程

开课平台： 全部 爱课程（中国大学MOOC） 学堂在线 智慧树 学银在线 重庆高校在线开放课程平台

课程类别： 全部 一流课程

开课平台： 全部 爱课程（中国大学MOOC） 学堂在线 智慧树 学银在线

为您找到 高等代数 相关课程 34 门

高等代数（上）

厦门大学 林亚南

"高等代数"是数学各专业的基础课程，也是数学修养的核心课程。"高等代数（上）"包同构对应的思想方法，力求突出几何直观与矩阵方法的对应和互动，力求尊重学生的认知规

爱课程（中国大学MOOC） 10万+人选课 19

MOOC迄今为止选课人数24.4万
国家高等教育智慧教育平台
34门高等代数课程中名列第一

线上资源优势互补

MOOC

- 短视频
- 测验
- 讨论区（图、文件）

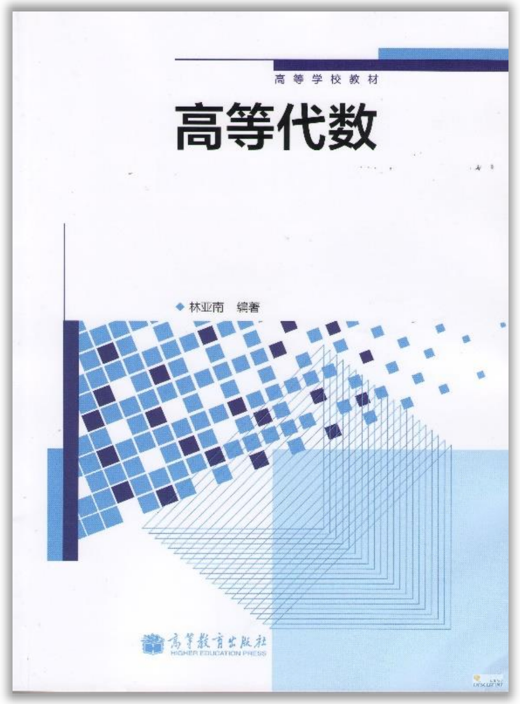
资源共享课

- 上课实录

精品课程

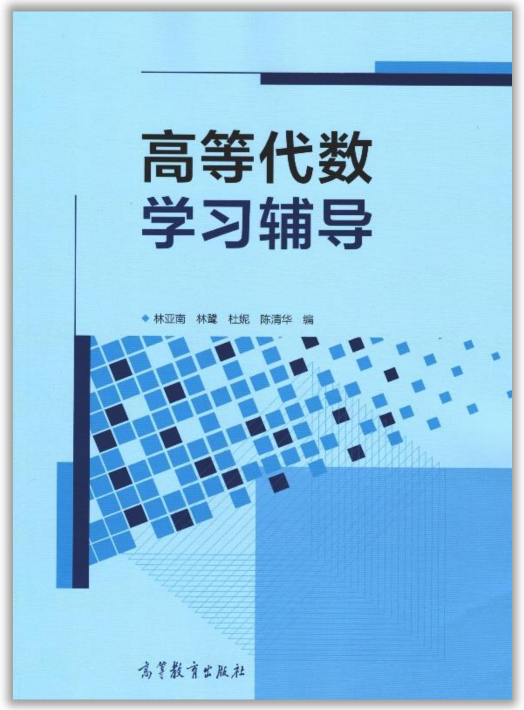
- 上课实录
- 课程试卷
- 考研竞赛题选
- 方法选讲等

厦门大学“高等代数”教材建设



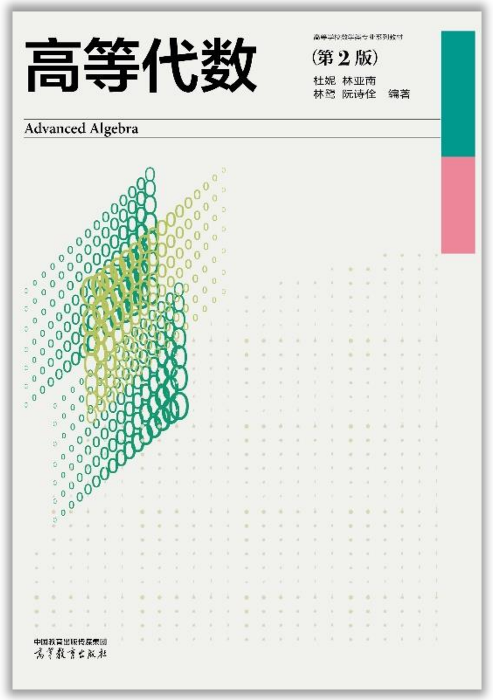
高等代数

- 高等教育出版社
- 2013年出版
- 33万字
- 8次印刷



高等代数学习辅导

- 高等教育出版社
- 2020年出版
- 46万字



高等代数第2版

- 高等教育出版社
- 2022年出版
- 41万字

“高等代数”第2版_内容

定理证明及内容编排有不同程度的变动

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 V 的一个基, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶方阵, $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 是 n 维列向量, 我们首先指出以上的“形式”写法具有的一些运算规律:

(1) $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\boldsymbol{X}+(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\boldsymbol{Y}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})$;

(2) $((\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})$;

(3) $((\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$.

补充“形式”记号满足的运算规律

“高等代数”第2版_内容

定理证明及内容编排有不同程度的变动

定理 5.3.3(中国剩余定理) 设 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x) \in F[x]$ 是两两互素的多项式. 则对于 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x) \in F[x]$, 其中 $\deg g_i(x) < \deg p_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$, 存在唯一 $g(x), q_1(x), q_2(x), \cdots, q_m(x) \in F[x]$, 使得

$$\deg g(x) < \sum_{i=1}^{m} \deg p_i(x),$$

且

$$g(x) = p_i(x)q_i(x) + g_i(x) \quad (i=1,2,\cdots,m).$$

证明 由引理 5.3.2, 存在 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$, 使

$$f_i(x) = l_i(x)p_i(x)+1, \quad f_i(x) = h_{ij}(x)p_j(x) \quad (i \neq j).$$

令 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)g_i(x)$. 根据带余除法, 有

$$f(x) = t(x)\prod_{i=1}^{m} p_i(x) + g(x), \text{这里} \deg g(x) < \deg \prod_{i=1}^{m} p_i(x) = \sum_{i=1}^{m} \deg p_i(x).$$

我们指出 $g(x) \neq 0$. 否则, 对于固定的 j, 有 $p_j(x) | f(x)$, 即 $p_j(x) \Big| \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)g_i(x)$. 又因为 $p_j(x) | f_r(x)$, $r \neq j$, 所以 $p_j(x) | f_j(x)g_j(x)$. 再因为 $f_i(x) = l_i(x)p_i(x)+1$, 所以 $p_j(x)/g_j(x)$, 与 $\deg g_j(x) < \deg p_j(x)$ 矛盾. 故对于任意给定的 $i(1 \leqslant i \leqslant m)$, 总有

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - t(x)\prod_{i=1}^{m} p_i(x) \\ &= \left(\sum_{j\neq i, j=1}^{m} f_j(x)g_j(x) + f_i(x)g_i(x)\right) - t(x)\prod_{i=1}^{m} p_i(x) \\ &= \sum_{j\neq i} h_{ji}(x)p_i(x)g_j(x) + (l_i(x)p_i(x)+1)g_i(x) - t(x)\prod_{i=1}^{m} p_i(x) \end{aligned}$$

思考 同余关系有如下性质:

(1) $a(x) \equiv 0(\bmod m(x))$ 的充要条件是 $m(x)|a(x)$;

(2) 若 $a(x) \equiv 1(\bmod m(x))$, 则 $(a(x), m(x)) = 1$; 反之未必;

(3) $a(x) \equiv b(x)(\bmod m(x))$, $c(x) \equiv d(x)(\bmod m(x))$, 则

$$(a(x)+c(x)) \equiv (b(x)+d(x))(\bmod m(x));$$

(4) $a(x) \equiv b(x)(\bmod m(x))$, $c(x) \equiv d(x)(\bmod m(x))$, 则

$$(a(x)c(x)) \equiv (b(x)d(x))(\bmod m(x));$$

(5) $a(x) \equiv b(x)(\bmod p(x))$, $a(x) \equiv b(x)(\bmod q(x))$, 且 $(p(x), q(x)) = 1$, 则

$$a(x) \equiv b(x)(\bmod (p(x)q(x))).$$

***定理 5.3.3 (中国剩余定理)** 设 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ $(m \geqslant 2)$ 是数域 F 上两两互素的多项式, 则对于 $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x) \in F[x]$, 其中 $\deg g_i(x) < \deg p_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$, 存在唯一多项式 $g(x)$, 使得

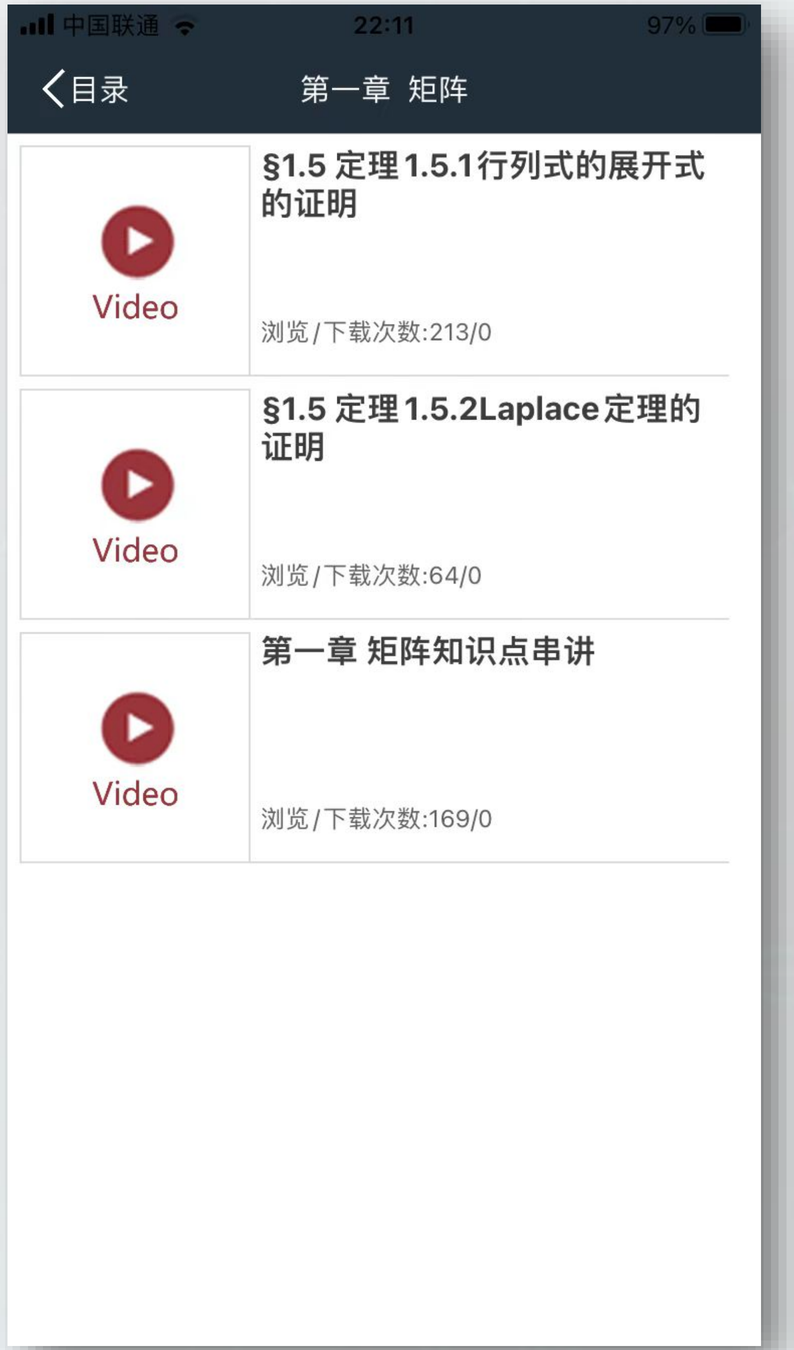
$$g(x) \equiv g_i(x)(\bmod p_i(x)), \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

且 $\deg g(x) < \sum\limits_{i=1}^{m} \deg p_i(x)$.

补充同余的基本性质、中国剩余定理的证明

“高等代数”第2版_数字资源

配备知识点串讲视频、定理精讲视频



定理 1.5.2 (Laplace 定理) 设 A 是 n 阶方阵, 在 A 中任意取定 k 行 (列), 那么选自这 k 行 (列) 的全部 k 阶子式与它们所对应的代数余子式的乘积之和等于 $\det A$. 即若取定 k 行 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, 则

$$\det A = \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} \widehat{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}. \quad (20)$$

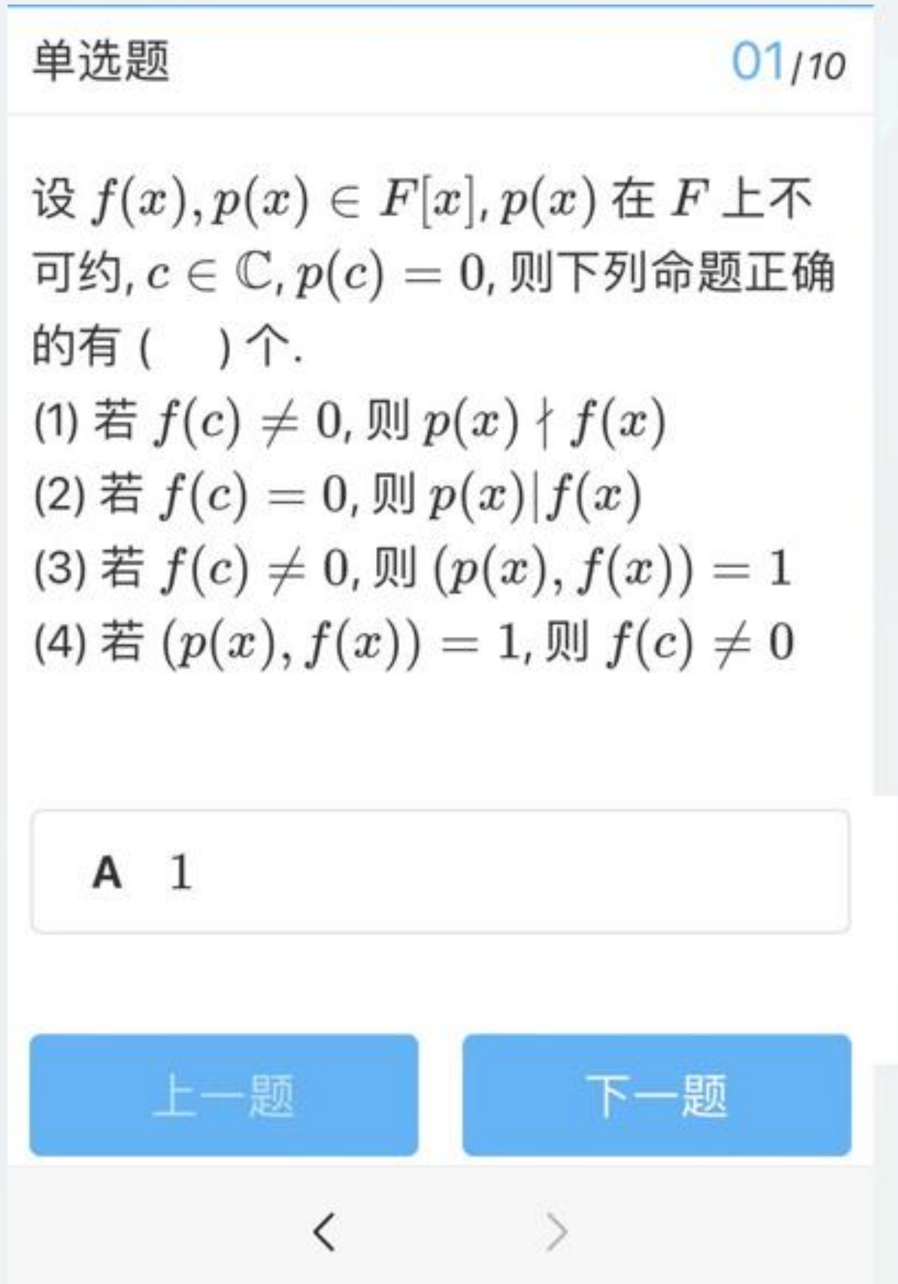
同样, 若取定 k 列 $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$, 则

$$\det A = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} \widehat{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}. \quad (21)$$

"高等代数"第2版_数字资源

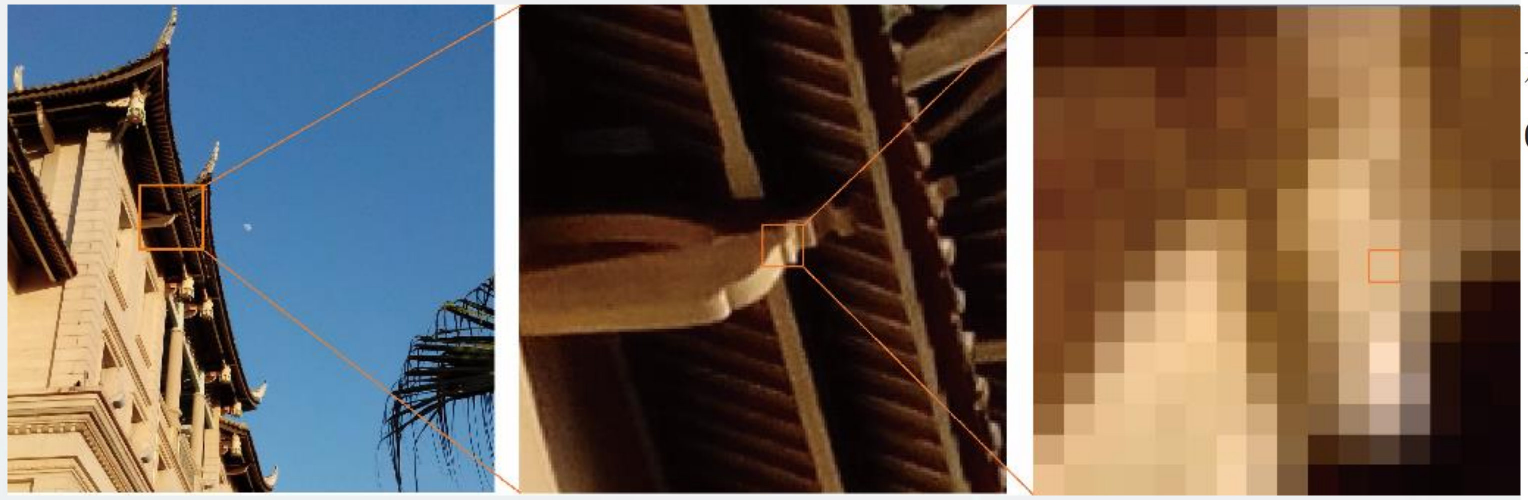
配备在线自测选择题

第五章自测题

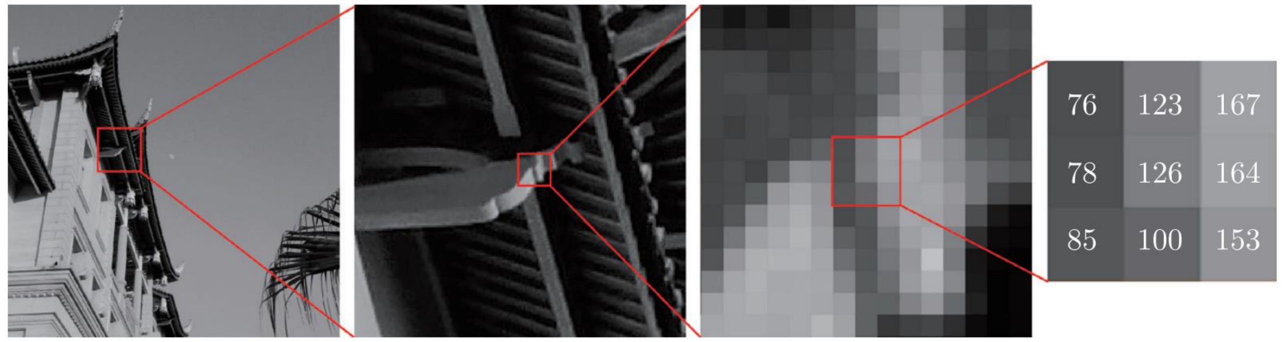


“高等代数”第2版_应用案例

增加应用案例，配图力求形象直观



我们日常熟悉的数字图像, 实际上也是矩阵. 如下述分辨率为 1440×1440 的灰度图像, 即为一个 1440×1440 矩阵, 每个矩阵的元对应图像的像素, 取值范围为 0—255.



应用案例

“高等代数”第2版_例题习题

增加例题和习题四百余题

复 习 题 A

1. 设 V 是数域 F 上的 ……
线性映射, 且 $\varphi(\xi_1+\xi$ ……
$\xi_3)=$______.

复 习 题 B

1. 设 V 是数域 F 上的一维线性空间. 证明: ……
充要条件是存在 $c\in F$, 使得对任意的 $\alpha\in$ ……
2. 设 n 维线性空间 V 上的线性变换 φ 在 V ……
明: $\varphi=c\,\mathrm{id}_V$, 其中 $c\in F$.
3. 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满 ……

复 习 题 C

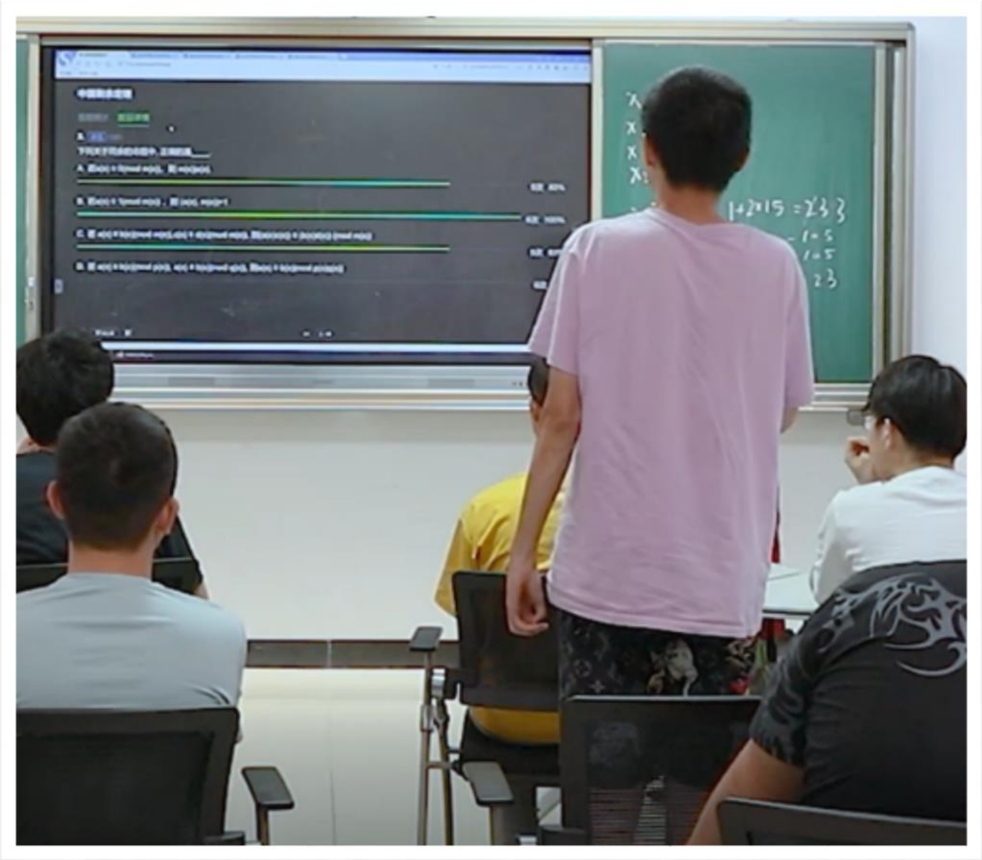
1. (1) 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是 V 上两两不同的非零线性变换, 求证: 存在 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 使得 $\varphi_i(\boldsymbol{\alpha})\neq\mathbf{0}$, $i=1,2,\cdots,s$;
(2) 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 是 V 上两两不同的线性变换, 求证: 存在 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 使得 $\varphi_1(\boldsymbol{\alpha}),\varphi_2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\varphi_s(\boldsymbol{\alpha})$ 两两不同.
2. 设 φ 是 $F^{n\times n}$ 到 F 的线性映射. 证明: 若对任意的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in F^{n\times n}$, $\varphi(\boldsymbol{AB})=\varphi(\boldsymbol{BA})$, 则存在 $\lambda\in F$, 使得对任意 $\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$, $\varphi(\boldsymbol{A})=\lambda\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$.

- 复习题A为填空题（每章10题）
- 复习题B为综合题（每章16题）
- 复习题C为选做题（每章8题）

基于课程资源的教学设计

慕课堂练习

课堂活动掠影



绵绵发力　久久为功

谢谢大家！

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m$$